2.27 ii) Si T es la proyección, entonces $Im(T) \oplus Nu(T) = \mathbb{V}$.

Por lo tanto $Im(T) \cap Nu(T) = \{0\}$ y $Im(T) + Nu(T) = \mathbb{V}$.

Pruebo esto partiendo de $T^2 = T$.

Si tomo un $v \in Im(T) \cap Nu(T)$, entonces

$v \in Im(T)$ y $v \in Nu(T)$, como $v \in Im(T)$, existe un u tq $T(u) = v$ y partiendo de $T^2 = T$:

$$T(T(u)) = T(u) \rightarrow T(v) = T(u) \rightarrow T(v) = v \rightarrow u = v$$

Entonces si $v \in Im(T) \rightarrow T(v) = v$.

y como $v \in Nu(T)$, $T(v) = 0$, entonces si $T(v) = v$ y $T(v) = 0$, $v = 0$ es el único elemento de $Im(T) \cap Nu(T)$

Por lo tanto $Im(T) \cap Nu(T) = \{0\}$ ✓

Por otro lado, quiero ver que dado $v \in \mathbb{V}$ existen $v_1 \in Im(T)$ y $v_2 \in Nu(T)$ tq:

$$v = v_1 + v_2$$

Por teorema de la dimensión:

$$\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{V})$$

y como $Nu(T) \oplus Im(T) \subseteq \mathbb{V} \rightarrow Nu(T) + Im(T) = \mathbb{V}$.

Por lo tanto habiendo demostrado que partiendo de $T^2 = T$ llego a que $Im(T) \oplus Nu(T) = \mathbb{V}$, efectivamente T es la proyección.

b) Si $T^2 = T \rightarrow$ por a) sabemos que T es $\Pi_{\mathrm{Im}T\, \mathrm{Nu}T}$

entonces si:

$S(v) = v_1 + v_2 - 2\Pi_{S_1 S_2}(v)$

$S(v) = v_1 + v_2 - 2v_1 \rightarrow S(v) = -v_1 + v_2$

Ahora:

$\boxed{S^2(v)} = S(S(v)) = S(-v_1 + v_2) = \underbrace{S(-v_1)}_{= -(-v_1)} + \underbrace{S(v_2)}_{= v_2}$

$\rightarrow = v_1 + v_2 = \boxed{I_V}$ ✓

2.27) c)

$$T^2 = T \circ T = \frac{1}{2}(I_V - S) \circ \frac{1}{2}(I_V - S) = \frac{1}{4}\left[(I_V - S) \circ (I_V - S)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(I_V \circ I_V - I_V \circ S - S \circ I_V + S \circ S) = \frac{1}{4}(I_V - 2S + S^2)$$

Como $S^2 = I_V \rightarrow \frac{1}{4}(I_V - 2S + I_V) = \frac{1}{4}(2I_V - 2S) =$

$$= \frac{1}{2}(I_V - S) = T(v) \checkmark$$

d) Si $S^2 = I_V$ → Por c) $T = \frac{1}{2}(I_V - S)$ → $T^2 = T$.

y por b) como $T^2 = T$ → $I_V - 2T = \Sigma_{Nu_T\, Im_T}$

Reemplazando en T:

$$I_V - 2T = I_V - 2\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right) = I_V - I_V + S = S$$

~~$\Sigma_{Nu_T\, Im_T}$~~ y $Nu(T) = Nu\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right)$, $Im(T) = Im\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right)$

Entonces ~~[illegible]~~

Como $I_V - 2T = \Sigma_{Nu_T\, Im_T}$ y $I_V - 2T = S$

→ $S = \Sigma_{Nu\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right)\, Im\left(\frac{1}{2}(I_V - S)\right)}$ ✓